ОЧЕРК ОСНОВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ОТДЕЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦГЭ ЗА 1981 - 2006 гг.

В. Л. Друскин, Л. А. Книжнерман

АННОТАЦИЯ. Статьи сотрудников отдела математического моделирования ЦГЭ сгруппированы по темам и схематично описаны. Приведены краткие воспоминания авторов о начальном периоде их работы в ЦГЭ.

ABSTRACT. Papers produced by the CGE Numerical Modelling Department's experts have been grouped according to the topics and briefly described. Reminiscences of the authors about the initial period of their work at the CGE presented.

Введение

Отдел математического моделирования под разными названиями функционирует с начала 80-х гг. XX в. Занимается теоретической работой в области вычислительной математики, а также разработкой вычислительно-математических программ решения прямых и обратных задач геофизики. При возникновении соответствующих потребностей нам приходится получать результаты в различных разделах математики.

К областям наших научных интересов относятся:

- Вычислительная линейная алгебра - методы Ланцоша и Арнольди.
- Численное решение уравнений в частных производных с помощью методов спектрального разложения Ланцоша и Арнольди, а также других методов, основанных на использовании подпространств Крылова.
- Теория разностных схем.
- Теория рациональной аппроксимации и её приложения к построению “оптимальных” разностных сеток для численного решения уравнений в частных производных.
- Обратные спектральные задачи.
- Численное решение некорректных задач геофизики с помощью вариационной регуляризации.

В отделе в разное время работали С. К. Асвадуров, В. Л. Друскин, Т. В. Тамарченко, а подразделениями, его включавшими, руководили О. М. Косенков, В. Т. Зюзин, П. Н. Гуров, И. М. Чуринова. Отметим, что В. Л. Друскин первые несколько лет работал в ЦГЭ под научным руководством А. С. Кронрода и А. П. Лавута.

В данной статье приводится обзор работ отдела, сгруппированных по темам. Список литературы содержит как работы, выполненные в рамках служебных заданий, так и результат личного творчества сотрудников, а также плоды совместных исследований, проведённых нашими сотрудниками с представителями других фирм и организаций.

Решение прямых и обратных двумерных осесимметричных каротажных задач

Одним из первых направлений нашей деятельности было создание методов решения двумерных осесимметричных задач каротажа. В этих задачах рассматривалась среда, состоявшая из вертикальной скважины и горизонтальных пластов, в каждом из которых физические параметры зависели только от цилиндрического радиуса.

При решении прямых задач электрического, бокового и индукционного каротажа решение в каждом пласте представляется в виде ряда по собственным функциям соответствующей одномерной дифференциальной задачи. Дискретизация дифференциальных уравнений проводится только по цилиндрическому радиусу, за счёт чего и получается вычислительный эффект. Разработанные методы матричной прогонки коэффициентов Фурье и трёхграничных интегральных уравнений описаны в работах [2, 7, 12, 13, 28, 56, 67]. Последний пример использования см. в [16].

Принципиальная возможность решения обратных каротажных задач гарантируется результатами статей [1, 3]. Для практического решения был разработан так называемый метод последовательных боковых поправок, заключающийся в итерационном подавлении влияния других пластов на показания зонда в данном пласте. На каждой итерации приходится решать одну двумерную прямую задачу и набор одномерных (вычислительно дешёвых) обратных задач. Даже если итерационный процесс сходится не во всей модели, что бывает в трудных ситуациях, то он обычно даёт хорошие результаты в той части модели, в которой он сходится. См. детали в [4, 8, 14].

Решение некоторых некорректных обратных задач геофизики

Статья [5] была первой в этом направлении. В серии статей [17 - 22] было предложено несколько вариационно-регуляризирующих методов численного решения обратных двумерных и трёхмерных задач гравиразведки. Входное поле разлагалось в ряд по многочленам Чебышёва или его модификацию, а коэффициенты ряда корректировались в процессе регуляризации. Оценки погрешности носили гёльдеровский характер в терминах ошибки измерений, что естественно для задач такого класса.

Работа [15] посвящена выяснению того, насколько повышает устойчивость таких задач измерение производных поля.

Теория методов Ланцоша и Арнольди

Многие численные методы (например, явные разностные схемы, схемы расщепления) сводятся к вычислению выражений вида

$$p(A)\varphi, \tag{1}$$

где A - симметричная матрица; φ - вектор и p - многочлен.

При этом обычно целью является аппроксимировать вектор $f(A)\varphi$, где f - функция, определённая на спектральном интервале A. Метод Ланцоша, изначально предназначенный для решения полной или частичной спектральной задачи, имеет модификацию (метод спектрального разложения Ланцоша, сокращённо МСРЛ), предназначенную для решения подобного рода задач путём оптимизации выбора многочлена p заданной степени.

Нам удалось доказать оценки погрешности МСРЛ для функций f, соответствующих решению эллиптических, параболических, гиперболических (дискретизированных) дифференциальных уравнений, а также схем расщепления. Например, оказалось, что при решении параболических уравнений для получения разумной точности достаточно числа умножений матрицы на векторы, пропорционального квадратному корню из физического времени, а не самому времени, как в явных разностных схемах.

Метод Ланцоша, однако, длительное время пребывал в забвении из-за своей вычислительной неустойчивости. Мы показали, что вычислительная неустойчивость метода Ланцоша не может существенно сказываться на конечном результате решения данного примера. Иными словами, если запустить программу решения одного и того же примера на компьютерах разных типов (или даже запустить по-разному скомпилированную программу на одном компьютере), то промежуточные результаты вычислений будут различаться, но по достижении сходимости процесса результаты совпадут друг с другом (и с правильным ответом) с точностью практически до ошибок округления. Это касается как МСРЛ, так и вычисления спектра [6, 10, 11, 25, 26, 44 - 47, 50, 57].

Метод Арнольди (соответственно МСРА) является аналогом метода Ланцоша (соответственно МСРЛ) в случае несимметричной матрицы A. Оценки погрешности метода Арнольди были получены в [23, 24, 64].

Выше шла речь о неадаптивных (не зависящих от вектора φ и от дыр в спектре А) оценках погрешности. Эти оценки принципиально важны, но если бы методы Ланцоша и Арнольди “вели себя не лучше”, чем эти оценки гарантируют, то, вероятно, пользователи предпочли бы разложения в матричные ряды Чебышёва (Фабера в несимметричном случае). На самом деле методы Ланцоша и Арнольди адаптируются к спектру пары (A, φ): грубо говоря, чем больше дыры в спектре, тем быстрее сходимость. Этот аспект поведения методов рассмотрен в работах [27, 61 - 63].

Использование методов Ланцоша и Арнольди при решении геофизических и иных прикладных задач

Трёхмерная нестационарная задача электроразведки в квазистационарном приближении сводится к параболической (во временно́м случае) или диссипативной (в частотном случае) системе уравнений Максвелла. Применение МСРЛ [9]) в сочетании с использованием сетки Лебедева - Йи позволило решать эту задачу на тогдашних советских компьютерах семейства ЕС, чего никакая разностная по времени схема сделать бы не позволила.

Соответствующая программа при подходящем выборе параметров съедала почти все ресурсы компьютера и потому использовалась как тестовая: в любую паузу запускали её и сравнивали результат с эталонным; при несовпадении машину останавливали для профилактики. Правда, один раз так обнаружили ошибку в программе, и начальник вычислительного центра Л. А. Гапеенков был рад тому, что “размочил счёт”.

Развитие исследований по этой теме, включая рассмотрение более сложных задач (например, анизотропных) и демонстрацию практических результатов, можно найти в работах [34, 35, 43, 48, 49, 55, 58, 59, 66, 69].

МСРЛ был также применён нами к решению уравнения теплопроводности, т. е. к решению прямой задачи термокаротажа или линейной задачи гидравлического каротажа [65].

В [54] мы неожиданно сумели применить МСРА в задаче вычисления цены американских опционов (ценных бумаг, перепродажа которых обставлена сложными условиями). Впрочем, похожие дифференциальные уравнения с плавающей границей встречаются и в геофизике.

“Оптимальные” конечно-разностные сетки

Во многих геофизических задачах аномалии, а также источники и приёмники расположены в относительно небольшой части пространства. Несмотря на это, при конечно-разностной дискретизации сетку приходится делать достаточно детальной и в остальной части пространства, что увеличивает вычислительные затраты. Для борьбы с этим печальным явлением были придуманы так называемые оптимальные сетки.

Рассмотрим задачу с переменной x. Предположим, что аномалии, источники и приёмники расположены на полуоси $x < 0$, а при $x \geq 0$ среда однородна. Условие сопряжения для дифференциального уравнения в точке 0 выражается в терминах так называемой марковской (импедансной) функции, т. е. функции вида

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{d\sigma(\tau)}{\lambda - \tau}, \quad \lambda \in C \setminus (-\infty, 0], \tag{2}$$

где σ - неотрицательная мера, такая, что интеграл сходится.

Было предложено формально дискретизировать уравнение при $x > 0$, не требуя хорошей аппроксимации в целом, а требуя лишь хорошей аппроксимации условия сопряжения в точке $x = 0$. Для этого нужно решить задачу рациональной аппроксимации функции (2) функцией (цепной дробью) вида

$$f_k(\lambda) = \cfrac{1}{\hat{h}_1\lambda + \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{\hat{h}_2\lambda + \dots \cfrac{1}{h_{k-1} + \cfrac{1}{\hat{h}_k\lambda + \cfrac{1}{h_k}}}}}} \tag{3}$$

$$h_i, \hat{h}_i > 0.$$

После того, как эта задача решена, остаётся взять из (3) значения $\hat{h}_i$ в качестве основных шагов разностной схемы, а $\hat{h}_i$ - в качестве дуальных шагов.

Эта идея была применена к решению эллиптических (электрокаротажных), параболических (электроразведочных) и гиперболических (акустических) задач [36 - 38, 52, 53, 60].

Теоретические аспекты использования оптимальных сеток при решении обратных задач обсуждаются в [41, 42].

Градиентные и двухсеточные методы решения обратных задач

При решении сложных каротажных или электроразведочных задач метод последовательных поправок может не работать (по крайней мере, самостоятельно). Мы занимаемся методами квазиньютоновского типа, обычно применяемыми в сочетании с вычислением производных с помощью вычислительной замены приёмника источником. Мы также используем для сносного вычисления производных оптимальные сетки. Соответствующие и родственные работы - [30 - 33, 68].

Другие работы

Некоторые работы из списка литературы выпали из приведённой выше классификации. Мы отметим здесь лишь некоторые.

В [51] мы предложили метод расширенных подпространств Крылова, заключающийся в том, чтобы вместо приближений вида (1) использовать приближения вида $A^{-m}p(A)\varphi$, $m \in \mathbf{N}$. Это технически возможно, когда матрица A дискретизированной задачи может быть легко факторизована. Данный метод позволил нам эффективно решить квазитрёхмерную (осесимметричную по модели, но не по возбуждению) прямую задачу электрокаротажа.

В статьях [39, 40] геофизики получили от нас ещё одно (см. также [60]) приложение замечательных аппроксимационных результатов Е. И. Золотарёва.

Заключительные замечания

Отметим, что в ЦГЭ работали и другие математики, например, В. Глоговский и Д. Фиников. Многие задачи были поставлены и/или обсуждались с А. С. Кашиком, Г. Н. Гогоненковым, Н. И. Рыхлинским, В. Н. Страховым, В. Н. Богаником, а трёхмерное электромагнитное моделирование - также с В. П. Бубновым и Б. Я. Лухминским. Контакты с этими специалистами (а также с теми геофизиками, кто перечислен во введении) не только были и остаются для нас приятными в человеческом плане, но и служили и служат источником новых задач и средством контроля за тем, чтобы не чрезмерно отклоняться от практических нужд.

Приложение

В. Л. Друскин о первых годах своей работы в ЦГЭ

Я пришёл в ЦГЭ в 1979 г., после окончания Губкинского института. А. С. Кашик направил меня поучиться математике к А. С. Кронроду, что соответствовало моей давней мечте. Я до этого слышал, что великий Кронрод “окопался” в ЦГЭ, и сам хотел у него поучиться, так что я был безумно рад. Про Кронрода можно прочитать на Интернет-странице

http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Kronrod.

Кронрод руководил математической группой в составе четырнадцатой (возглавлявшейся И. М. Чуриновой) тематической партии (это традиционное для данной отрасли название подразделения). Кроме него, туда входили очень хороший математик А. П. Лавут и инженеры Л. Рудакова, Г. Полетаева и Н. Михалёва. Группа занималась разработкой алгоритмов и программ решения прямых задач электрического каротажа - двумерных и трёхмерных. Задачи по тем временам решались очень серьёзные.

Кронрод меня сначала воспринял с неохотой: он не привык, чтобы ему начальство навязывало учеников. Но после обсуждения нескольких задач из знаменитой кронродовской серии он подобрел, и мы с ним прозанимались несколько месяцев - до трагического инсульта, который практически сделал его нетрудоспособным. Почти сразу после кронродовского инсульта Лавут был арестован за его работу в Amnesty International (было начало Афганской войны, сопровождавшееся последним советским закручиванием гаек). В результате группа фактически прекратила существование. Ну а вскоре после этого мы с Леонидом Книжнерманом подхватили знамя (в научном смысле).

Подчеркну, что для моей судьбы встреча с Кронродом (и вообще моё погружение в атмосферу ЦГЭ тех времён, чем-то напоминавшую атмосферу в НИИ из сказки Стругацких “Понедельник начинается в субботу”) имела огромное значение. Но решающей была роль А. С. Кашика, который не только набрал абсолютно “политически некорректных” удивительных людей, проявив незаурядное гражданское мужество, но и проявлял интерес к науке, доходивший до одержимости. Моё продолжительное сотрудничество с А. С. Кашиком в основном и сформировало меня как учёного.

Л. А. Книжнерман о первых годах своей работы в ЦГЭ

Я поступил в ЦГЭ осенью 1980 г., по окончании аспирантуры на кафедре теории чисел математического факультета МГПИ. Я года два проработал в “двадцатой партии” под руководством В. А. Милашина. Это было полезное время: я в приятной атмосфере адаптировался к геофизическому окружению и набрался производственно-программистского опыта. Я с умилением смотрю на статью [29].

В какой-то момент меня узнал Владимир: оказалось, мы учились в одной школе...

ЛИТЕРАТУРА

1. *Друскин В. Л.*, 1982, О единственности решения обратной задачи электроразведки и электрокаротажа для кусочно-постоянных проводимостей: Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", **1**, 72 - 75.
2. *Друскин В. Л.,* 1983, Прямой метод вычисления стационарных полей для одного класса моделей, принятых в геофизике: деп. в ВИНИТИ, 5099-83.
3. *Друскин В. Л.,* 1988, О двумерной обратной задаче зондирования становлением поля в ближней зоне: Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", **11**, 66 - 69.
4. *Друскин В. Л., Кашик А. С., Книжнерман Л. А., Косенков О. М.*, 1985, Решение обратной задачи электрокаротажа для осесимметричных неоднородных моделей: Матем. методы идентификации в задачах геологии: М., Наука, 109 - 116.
5. *Друскин В. Л., Книжнерман Л. А.*, 1983,Об определении первой границы в двумерной обратной задаче электроразведки: Матем. методы идентификации моделей в геологии, М., Наука, 126 - 134.
6. *Друскин В. Л., Книжнерман Л. А.*, 1987, Использование операторных рядов по ортогональным многочленам при вычислении функций от самосопряжённых операторов и обоснование феномена Ланцоша: М., ИЗМИР АН СССР, деп. в ВИНИТИ 02.03.1987, № 1535-В27, 47 с.
7. *Друскин В. Л., Книжнерман Л. А.*, 1987, Метод решения прямых задач электрокаротажа и электроразведки на постоянном токе: Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", **4**, 63 - 71.
8. *Друскин В. Л., Книжнерман Л. А.*, 1987, Об одном итерационном алгоритме решения двумерной обратной задачи бокового каротажного зондирования: Геология и геофизика, **9**, 118 - 123.
9. *Друскин В. Л., Книжнерман Л. А.*, 1988, Спектральный дифференциально-разностный метод численного решения трёхмерных нестационарных задач электроразведки: Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", **8**, 63 - 74.
10. *Друскин В. Л., Книжнерман Л. А.*, 1989, Два полиномиальных метода вычисления функций от симметричных матриц: Журн. вычисл. математики и матем. физики, **29**, **12**, 1763 - 1775.
11. *Друскин В. Л., Книжнерман Л. А.*, 1991, Оценки ошибок в простом процессе Ланцоша при вычислении функций от симметричных матриц и собственных значений: Журн. вычисл. математики и матем. физики, **31**, **7**, 970 - 983.
12. *Друскин В. Л., Тамарченко Т. В.*, 1988, Быстрый метод частичных областей для решения задачи индукционного каротажа: Геология и геофизика, **29**, **3**, 129 - 135.
13. *Друскин В. Л., Тамарченко Т. В.*, 1989, Быстрый вариант метода частичных областей для решения задач дифракции электромагнитного поля: Матем. моделирование, **1**, **4**, 140 - 149.
14. *Друскин В. Л., Щедрина С. В.*, 1991,Оптимизация методов типа простой итерации, используемых при решении геофизических обратных задач (на примере электрокаротажа): Геология и геофизика, **8**, 115 - 121.
15 *Кашик А. С., Книжнерман Л. А.*, 1989, О повышении устойчивости постановок обратных задач геофизики: Геология и геофизика, **1**, 126 - 129.
16. *Кашик А. С., Рыхлинский Н. И., Книжнерман Л. А., Кривоносов Р. И., Степанов А. С.*, 2004, К вопросу об электрическом каротаже скважин, обсаженных стальными колоннами: Каротажник, **3** - **4** (116 - 117), 8 - 23.
17. *Книжнерман Л. А.*, 1983, Адаптивный вариационно-регуляризирующий метод решения задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа: деп. в ВИНИТИ 09.09.1983, № 5170-83 Деп., 8 с.
18. *Книжнерман Л. А.*, 1983, Оценка погрешности нелинейного вариационно-регуляризирующего метода выделения полюсов потенциальных полей: деп. в ВИНИТИ 09.09.1983, № 5173-83 Деп., 15 с.
19. *Книжнерман Л. А.*, 1984, Численное решение задачи Коши для уравнения Лапласа с помощью разложения в ряды Фурье - Чебышёва: Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", **10**, 76 - 81.
20. *Книжнерман Л. А.*, 1984, Выделение полюсов потенциальных полей с помощью разложения в ряды Фурье - Чебышёва: Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", **11**, 119 - 123.
21. *Книжнерман Л. А.*, 1985, Эффективность распознавания как способа выбора параметра регуляризации при аналитическом продолжении потенциальных полей разложением в ряды Чебышёва: Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", **5**, 87 - 90.
22. *Книжнерман Л. А.*, 1988, Численный метод продолжения трёхмерных потенциальных полей с ограниченного участка земной поверхности: Изв. АН СССР, сер. "Физика Земли", **12**, 23 - 30.
23. *Книжнерман Л. А.*, 1991, Вычисление функций от несимметричных матриц с помощью метода Арнольди: Журн. вычисл. математики и матем. физики, **31**, **1**, 5 - 16.
24. *Книжнерман Л. А.*, 1992, Оценки погрешности метода Арнольди: случай нормальной матрицы: Журн. вычисл. математики и матем. физики, **32**, **9**, 1347 - 1360.
25. *Книжнерман Л. А.*, 1995, Качество аппроксимаций к хорошо отделённому собственному значению и расположение "чисел Ритца" в простом процессе Ланцоша: Журн. вычисл. математики и матем. физики, **35**, **10**, 1459 - 1475.
26 *Книжнерман Л. А.*, 1996, Простой процесс Ланцоша: оценки погрешности гауссовой квадратурной формулы и их приложения: Журн. вычисл. математики и матем. физики, **36**, **11**, 5 - 19.
27. *Книжнерман Л.*, 2006, Квадратура Гаусса - Арнольди для $< (zI - A)^{-1}\varphi, \varphi >$ и Паде-подобная рациональная аппроксимация функций марковского типа: Математический сборник.
28. *Косенков О. М., Тамарченко Т. В.*, 1992, Математическое моделирование зондов электрического каротажа с объёмными электродами в двух- и трёхмерной геометрии, Геология и геофизика, **9**, **3**, 128 - 136.
29. *Милашин В. А., Книжнерман Л. А.*, 1984, Первый опыт оптимизации схем полевых наблюдений при помощи ЭВМ: ВНИИОЭНГ, "Нефтегаз. геология, геофизика и бурение", вып. 8, 24 - 26.
30. *Abubakar A., Habashy T., Druskin V., Davydycheva S., Barber T., Wang H., Knizhnerman L.*, 2004, An anisotropic three-dimensional forward and inverse modeling of triaxial induction measurements, 45th Annual Logging Symposium Transactions, Netherlands, June.
31. *Abubakar A., Habashy T. M., Druskin V., Davydycheva S., Wang H., Barber T., Knizhnerman L.*, 2004, A three-dimensional parametric inversion of multicomponent multispacing induction logging data: Proceedings of 74th SEG Annual Meeting, Denver, October 10 - 15.
32. *Abubakar A., Habashy T. M., Druskin V. and Knizhnerman L.*, 2006, An enhanced Gauss - Newton inversion algorithm using a dual optimal grid approach: IEEE Transections on Geoscience and Remote Sensing, **44**, **6**, 1419 - 1427.
33. *Abubakar A., Habashy T. M., Druskin V., Knizhnerman L., Davydycheva S.*, 2006, A 3D parametric inversion algorithm for triaxial induction data: Geophysics, **71**, **1**, G1 - G9.
34. *Anderson B., Barber T., Druskin V., Ping Lee, Dussun E., Knizhnerman L. and Davydycheva S.*, 1999, The response of multiarray induction tools in highly dipping formations with invasion and in arbitrary 3D geometries: the Log Analyst, **40**, **5**, 327 - 344.
35. *Anderson B. I., Druskin V., Ping Lee, Luling M. G., Schoen E., Tabanou J., Wu P., Davydycheva S. and Knizhnerman L.*, 1997, Modeling of 3-D effects on 2-MHz LWD resistivity logs: In: SPWLA 38th Annual Logging Symposium Transactions) 1997, June 15-18, Houston, Tex., Society of Professional Well Log Analysts, Paper N, 14 p.
36. *Asvadurov S., Druskin V., Guddati M. N. and Knizhnerman L.*, 2003, On optimal finite difference approximation to PML: SIAM J. Numer. Anal, **41**, **1**, 287 - 305.
37. *Asvadurov S., Druskin V., Knizhnerman L.*, 2000, Application of the difference Gaussian rules to solution of hyperbolic problems: J. Comput. Phys., **158**, 116 - 135.
38. *Asvadurov S., Druskin V. and Knizhnerman L.*, 2002, Application of the difference Gaussian rules to solution of hyperbolic problems. II. Global expansion: J. Comput. Phys., **175**, **1**, 24 - 49.
39. *Asvadurov S., Knizhnerman L. and Pabon J.*, 2001, Finite-difference modeling of viscoelastic materials with quality factors Q of arbitrary magnitude: Schlumberger-Doll Research, TR OFSR/RN/2001/151/RTMI/C.

40. *Asvadurov S., Knizhnerman L. and Pabon J.*, 2004, Finite-difference modeling of viscoelastic materials with quality factors Q of arbitrary magnitude: Geophysics, **69**, **3**, 817 - 824.
41. *Borcea L., Druskin V. and Knizhnerman L.*, 2005, On the continuum limit of a discrete inverse spectral problem on optimal finite difference grids: Comm. Pure Appl. Math., **58**, 1231 - 1279.
42. *Borcea L., Druskin V. and Knizhnerman L.*, 2005, On the sensitivity of Lanczos recursions to the spectrum: Linear Algebra Appl., **396**, 103 - 125.
43. *Davydycheva S. and Druskin V.*, 1995, Staggered grid for Maxwell's equations in arbitrary 3-D inhomogeneous anisotropic media: Proc. Int. Symp. on Three-Dimensional Electromagnetics, Schlumberger-Doll Research, Ridgefield, CT, 181 - 187.
44 *Druskin V., Greenbaum A., and Knizhnerman L.*, 1998, Using nonorthogonal Lanczos vectors in the computation of matrix functions: SIAM J. Sci. Comp., **19**, 38 - 54.
45. *Druskin V. and Knizhnerman L.*, 1992, The Lanczos optimization of a splitting-up method to solve homogeneous evolutionary equations: J. Comput. Appl. Math., **42**, 221 - 231.
46. *Druskin V. and Knizhnerman L.*, 1992, Evaluations for Krylov subspace approximation to internal eigenvalues of large symmetric matrices and bounded self-adjoint operators with continuous spectrum: Schlumberger-Doll Research, Res. Note, September 2.
47. *Druskin V. and Knizhnerman L.*, 1994, On application of the Lanczos method to solution of some partial differential equations: J. Comput. Appl. Math., **50**, 255 - 262.
48. *Druskin V., Knizhnerman L.*, 1994, Spectral approach to solving three-dimensional Maxwell's diffusion equations in the time and frequency domains: Radio Science, **29**, **4**, 937 - 953.
49 *Druskin V. and Knizhnerman L.*, 1995, Exponential split preconditioning of Krylov subspaces to compute functions of elliptic operators, illustrated by the 3-D diffusion and Maxwell equations: Schlumberger-Doll Research, Rep. № EMG-001-95-23, November 29.
50. *Druskin V. and Knizhnerman L.*, 1995, Krylov subspace approximation of eigenpairs and matrix functions in exact and computer arithmetic: Numer. Linear Algebra with Appl., **2**, **3**, 205 - 217.
51. *Druskin V. and Knizhnerman L.*, 1998, Extended Krylov subspaces: approximation of the matrix square root and related functions: SIAM J. Matrix Anal. Appl., **19**, **3**, 755 - 771.
52. *Druskin V. and Knizhnerman L.*, 1999, Gaussian spectral rules for the three-point second differences: I. A two-point positive definite problem in a semi-infinite domain: SIAM J. Numer. Anal., **37**, **2**, 403 - 422.
53. *Druskin V. and Knizhnerman L.*, 2000, Gaussian spectral rules for second order finite-difference schemes: Numer. Algorithms, **25** (1 - 4), 139 - 159.
54. *Druskin V., Knizhnerman L., Kostek S. and Tamarchenko T.*, 1997, Krylov subspace reduction and its extensions for option pricing: Comput. Finance, **1**, **1**.
55. *Druskin V. L., Knizhnerman L. A. and Ping Lee*, 1999, New spectral Lanczos decomposition method for induction modeling in arbitrary 3-D geometry: Geophysics, **64**, **3**, 701 - 706.
56. *Druskin V., Knizhnerman L. and Tamarchenko T.*, 1998, Fast difference-differential method for geophysical electrodynamics: In: K. K. Roy, S. K. Verma, and K. Mallick (ed.), Advances in Deep Electromagnetic Exploration, Narosa Publishing House, New Delhi, India and Springer Verlag, Heidelberg, Germany.
57. *Greenbaum A., Druskin V. L., and Knizhnerman L. A.*, 1999, On solving indefinite linear systems by means of the Lanczos method: Журн. вычисл. математики и матем. физики, **39**, **3**, 371 - 377.
58 *Hördt A., Druskin V., Knizhnerman L., and Strack K.-M.,* 1992, Interpretation of 3-D effects in deep transient electromagnetic soundings in the Münsterland area (Germany): Geophysics, **57**, **9**, 1127 - 1137.
59. *M. van der Horst, Druskin V., Knizhnerman L.*, 1995, Modelling the response of induction logging tools in 3D geometries with the Spectral Lanczos Decomposition Method: Schlumberger-Doll Research, Res. Note № EMG-001-95-18, September 18.
60. *Ingerman D., Druskin V. and Knizhnerman L.*, 2000, Optimal finite difference grids and rational approximations of the square root. I. Elliptic functions: Communic. on Pure and Appl. Math., **LIII**, 1039 - 1066.
61. *Knizhnerman L.*, 1995, On adaptation of the Lanczos method to the spectrum: Schlumberger-Doll Research, Res. Note № EMG-001-95-12, May 12.
62. *Knizhnerman L.*, 1996, On adaptation of the Arnoldi method to the spectrum: Schlumberger-Doll Research, Res. Note № EMG-001-96-03, February 12.
63. *Knizhnerman L.*, 2002, Adaptation of the Lanczos and Arnoldi methods to the spectrum, or why the two Krylov subspace methods are powerful: Чебышёвский сборник, **3**, **2**, 141 - 164.
64. *Knizhnerman L.*, 1999, Error bounds for the Arnoldi method: a set of extreme eigenpairs: Linear Algebra and Appl., **296**, 191 - 211.
65. *Knizhnerman L., Druskin V., Quing-Huo Liu, and Kuchuk F. J.*, 1994, Spectral Lanczos decomposition method for solving single-phase fluid flow in porous media: Numer. Methods for Partial Different. Equations, **10**, 569 - 580.
66. *Moskow S., Druskin V., Habashy T., Lee P., and Davydycheva S.*, 1998, A finite difference scheme for elliptic equations with rough coefficients using a Cartesian grid nonconforming to interfaces: SIAM J. Numer. Anal., **36**, **2**, 442 - 464.
67. *Tamarchenko T. and Druskin V.*, 1993, Fast modeling of induction and resistivity logging in the model with mixed boundaries: Transactions of SPWLA 34th Annual Logging Symposium, Calgary, Alberta, Canada, , GG1 - GG9.
68. *Torres-Verdin C., Druskin V. L., Sheng Fang, Knizhnerman L. A., Malinverno A.*, 2000, A dual grid nonlinear inversion technique with applications to the interpretation of the dc resistivity data: Geophysics, **65**, **6**, 1733 - 1745.
69. *Zaslavsky M., Davydycheva S., Druskin V., Abubakar A., Habashy T., Knizhnerman L.*, 2006, Finite-difference solution of the three-dimensional electromagnetic problem using divergence-free preconditioners: SEG paper, 76th annual meeting, New Orleans.